BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Loại 1. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, một đường thẳng

A. Tóm tắt lý thuyết

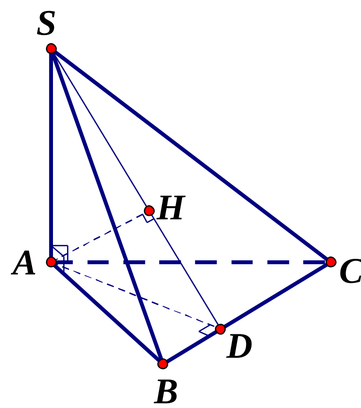
1. Định nghĩa: Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng (hoặc đường thẳng) bằng khoảng cách từ điểm đó tới hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng (hoặc đường thẳng).

Khoảng cách từ điểm $\mathbf{M}$ tới mặt phẳng $(\mathbf{P})$ được ký hiệu là $\mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))$. $\mathbf{H}$ là hình chiếu vuông góc của $\mathbf{M}$ lên $(\mathbf{P})$ thì $\mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))=\mathbf{MH}$	Khoảng cách từ điểm $\mathbf{M}$ tới đường thẳng Δ được ký hiệu là $\mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)$. $\mathbf{H}$ là hình chiếu vuông góc của $\mathbf{M}$ lên Δ thì $\mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)=\mathbf{MH}$.

2. Bài toán cơ bản: Nhiều bài toán tính khoảng cách từ điểm tới mặt phẳng, từ điểm tới đường thẳng có thể quy về bài toán cơ bản sau

Bài toán: Cho hình chóp $\mathbf{S.ABC}$ có $\mathbf{SA}$ vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{A}$ đến mặt phẳng $(\mathbf{SBC})$ và khoảng cách từ điểm $\mathbf{S}$ đến đường thẳng $\mathbf{BC}$.

Cách giải



Gọi $\mathbf{D}$ là chân đường vuông góc hạ từ $\mathbf{A}$ xuống $\mathbf{BC}$, $\mathbf{H}$ là chân đường vuông góc hạ từ $\mathbf{A}$ xuống $\mathbf{SD}$. Ta có

+) $\mathbf{SA}\perp(\mathbf{ABC}) \Rightarrow \mathbf{BC}\perp\mathbf{SA}$, lại có $\mathbf{BC}\perp\mathbf{AD}$ (do dựng) $\Rightarrow \mathbf{BC}\perp(\mathbf{SAD}) \Rightarrow \mathbf{SD}\perp\mathbf{BC} \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{S};\mathbf{BC})=\mathbf{SD}$.

+) Từ chứng minh trên, đã có $\mathbf{BC}\perp(\mathbf{SAD}) \Rightarrow \mathbf{AH}\perp\mathbf{BC}$, lại có $\mathbf{AH}\perp\mathbf{SD}$ (do vẽ) $\Rightarrow \mathbf{AH}\perp(\mathbf{SBC}) \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{A};(\mathbf{SBC}))=\mathbf{AH}$.

3. Một số lưu ý

*** Về cách tính khoảng cách một cách gián tiếp**

+) $\mathbf{MN}\parallel(\mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))=\mathbf{d}(\mathbf{N};(\mathbf{P}))$.

+) $\begin{cases}\mathbf{M},\mathbf{N}\in(\mathbf{Q})\\(\mathbf{Q})\parallel(\mathbf{P})\end{cases} \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))=\mathbf{d}(\mathbf{N};(\mathbf{P}))$.

+) $\mathbf{MN}\cap(\mathbf{P})=\mathbf{I} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))}{\mathbf{MI}}=\dfrac{\mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{Q}))}{\mathbf{NI}}$.

Trường hợp đặc biệt: $\mathbf{I}$ là trung điểm của $\mathbf{MN} \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P}))=\mathbf{d}(\mathbf{N};(\mathbf{P}))$.

+) $\mathbf{MN}\parallel\Delta \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)=\mathbf{d}(\mathbf{N};\Delta)$.

+) $\mathbf{MN}\cap\Delta=\mathbf{I} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)}{\mathbf{MI}}=\dfrac{\mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)}{\mathbf{NI}}$.

Trường hợp đặc biệt: $\mathbf{I}$ là trung điểm của $\mathbf{MN} \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{M};\Delta)=\mathbf{d}(\mathbf{N};\Delta)$.

*** Về cách sử dụng thể tích để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:** Cho hình chóp $\mathbf{S.A_1A_2...A_n}$. Ta có

$$\mathbf{d}\left[\mathbf{S},(\mathbf{A_1A_2...A_n})\right]=\frac{3V_{S.A_1A_2...A_n}}{S_{A_1A_2...A_n}}.$$

*** Khoảng cách từ một đường thẳng tới mặt phẳng song song với nó:** Cho $\Delta\parallel(\mathbf{P})$, $\mathbf{M}$ là một điểm bất kỳ trên Δ. Khi đó

$$\mathbf{d}(\Delta;(\mathbf{P}))=\mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{P})).$$

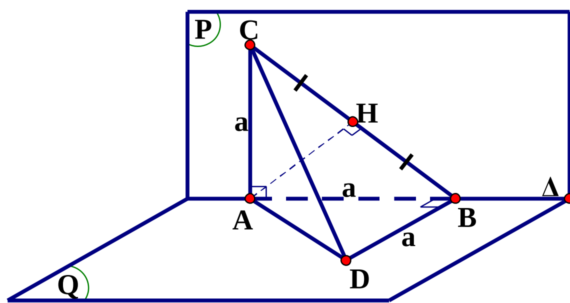
*** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:** Cho $(\mathbf{P})\parallel(\mathbf{Q})$, $\mathbf{M}$ là một điểm bất kỳ trên $(\mathbf{P})$. Khi đó

$$\mathbf{d}((\mathbf{P});(\mathbf{Q})) = \mathbf{d}(\mathbf{M};(\mathbf{Q})).$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. [ĐHD03] Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy A, B thuộc Δ và đặt $AB = a$. Lấy C, D lần lượt thuộc (P) và (Q) sao cho AC, BD vuông góc với Δ và $AC = BD = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng phẳng (BCD).

Giải



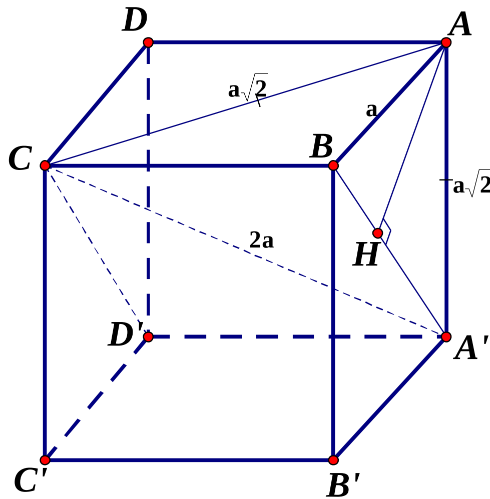
Ta có $(P) \perp (Q)$, $(P) \cap (Q) = \Delta$, $AC \subset (P)$, $AC \perp \Delta \Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow BD \perp AC$. Lại có $BD \perp AB \Rightarrow BD \perp (ABC)$ (1).

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC. Vì ΔABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$ và $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ (1) suy ra $AH \perp BD \Rightarrow AH \perp (BCD)$. Do đó H là chân đường vuông góc hạ từ A lên $(BCD) \Rightarrow d(A;(BCD)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2. [ĐHD12] Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Giải



$\Delta A'AC$ vuông cân (tại A) nên $AC = AA' = \frac{A'C}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$. ΔABC vuông cân (tại B) nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$.

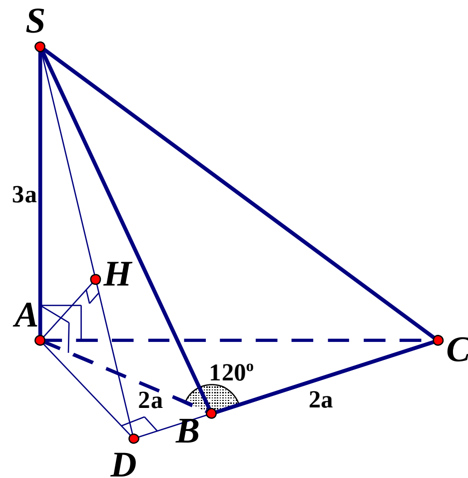
Hạ $AH \perp A'B$ ($H \in A'B$) .Ta có $BC \perp ABB'A'$ $\Rightarrow$ $AH \perp BC$, lại có $AH \perp A'B$ (do dựng) $\Rightarrow$ $AH \perp (BCD')$.

AH là đường cao của tam giác vuông ABA' $\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

.Vậy $d(A; BCD') = AH = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Giả sử $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Giải



Dựng $AD \perp BC$ ($D \in BC$) và $AH \perp SD$ ($H \in SD$).

Thật vậy, từ giả thiết ta có $CD \perp SA$, lại có $CD \perp AD$ (do dựng) $\Rightarrow$ $CD \perp (SAD)$ $\Rightarrow$ $AH \perp CD$, mà $AH \perp SD$ $\Rightarrow$ $AH \perp (SCD)$ $\Rightarrow$ H là chân đường vuông góc hạ từ A lên (SBC).

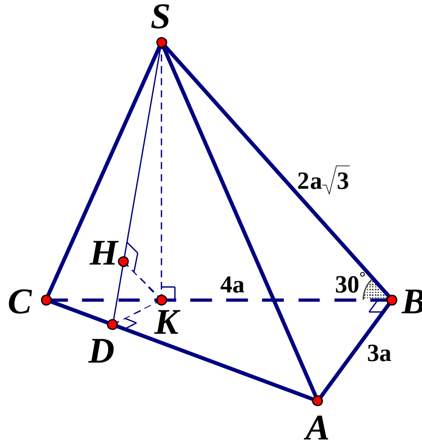
Ta có $AD = AB \sin \widehat{ABD} = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

AH là đường cao của tam giác SAD vuông tại A nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$. Vậy $d(A; SBC) = AH = \frac{3a}{2}$.

Ví dụ 4. [ĐHD11] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Giải



Hạ $SK \perp BC$ ($K \in BC$). Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SK \perp (ABC)$.

Ta có $BK = SB\cos\widehat{SBC} = 2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$

$\Rightarrow KC = BC - BK = 4a - 3a = a$.

Do đó nếu ký hiệu d_1, d_2 lần lượt là các khoảng cách từ các điểm B, K tới (SAC) thì $\frac{d_1}{d_2} = \frac{BC}{KC} = 4$, hay $d_1 = 4d_2$.

Hạ $KD \perp AC$ ($D \in AC$), hạ $KH \perp SD$ ($H \in SD$). Từ $SK \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp SK$, lại có $AC \perp KD$ (do dựng) $\Rightarrow AC \perp (SKD) \Rightarrow KH \perp AC$, mà $KH \perp SD$ (do dựng) $\Rightarrow$ $KH \perp (SAC) \Rightarrow d_2 = KH$.

Từ $\Delta ADK \sim \Delta ABA$ suy ra: $\frac{CK}{CA} = \frac{DK}{BA}$ $\Rightarrow DK = \frac{BA.CK}{CA} = \frac{3a.a}{5a} = \frac{3a}{5}$

$(CA = \sqrt{BA^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a)$.

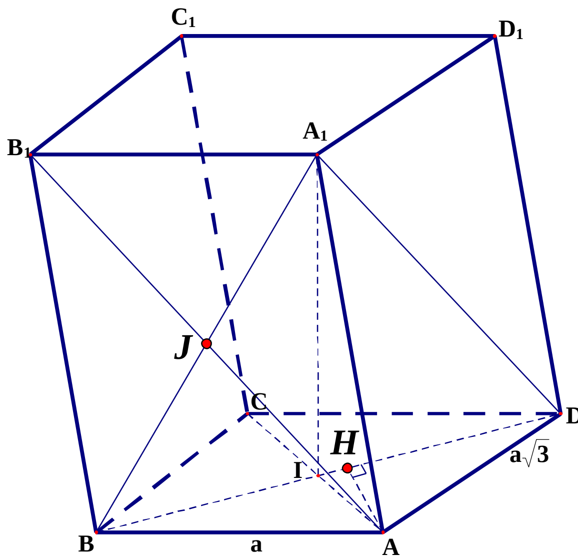
$KS = SB.\sin\widehat{SBC} = a\sqrt{3}$. KH là đường cao của tam giác vuông SKD nên:

$$\frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KD^2} + \frac{1}{KS^2} = \frac{25}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow KH = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Vậy $d(B;(SAC)) = d_1 = 4d_2 = 4KH = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Ví dụ 5. [ĐHB11] Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Giải



Đặt $I = AC \cap BD$. Từ giả thiết suy ra $A_1I \perp (ABCD)$.

Đặt $J = B_1A \cap A_1B$ $\Rightarrow$ J là trung điểm của B_1A, đồng thời $J = B_1A \cap (A_1BD)$ $\Rightarrow$ $d(B_1;(A_1BD)) = d(A;(A_1BD))$.

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BD. Từ $A_1I \perp (ABCD) \Rightarrow AH \perp A_1H$, lại có $AH \perp BD$ (do dựng) $\Rightarrow$ $AH \perp (A_1BD) \Rightarrow d(A;(A_1BD)) = AH$.

AH là đường cao của tam giác ABD vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(A;(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. SA có độ dài bằng a và vuông góc với đáy.

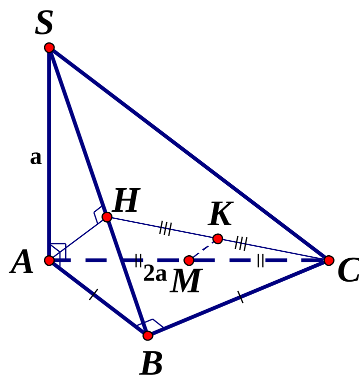
1) Tính khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC.

2) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A lên SB. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến đường thẳng CH.

Giải

1) Ta có $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $BC \perp SA$, cũng từ giả thiết ta có $BC \perp AB$ $\Rightarrow$ $BC \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ $SB \perp BC$. $AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $d(S;BC) = SB = a\sqrt{3}$.



2) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A lên SB. Ở câu trên, ta đã chứng minh $BC \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ $AH \perp BC$, lại có $AH \perp SB$ $AH \perp CH$.

Lại lấy K là trung điểm của CH

$\Rightarrow$ MK song song và bằng $\frac{1}{2}AH$

$\Rightarrow$ $MK \perp CH$, $MK = \frac{1}{2}\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}} = \frac{1}{2}\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d\left(M;CH\right)=MK=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

C. Bài tập

Bài 1. Cho tứ diện $\mathbf{OABC}$ có $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ $\mathbf{OH}\perp\left(\mathbf{ABC}\right)$.

1) Chứng minh: $\mathbf{H}$ là trực tâm $\Delta\mathbf{ABC}$.

2) Chứng minh: $\frac{1}{\mathbf{OH}^2}=\frac{1}{\mathbf{OA}^2}+\frac{1}{\mathbf{OB}^2}+\frac{1}{\mathbf{OC}^2}$.

Bài 2. [ĐHD02] Cho tứ diện $\mathbf{ABCD}$ có $\mathbf{AD}\perp\left(\mathbf{ABC}\right)$; $\mathbf{AC}=\mathbf{AD}=\mathbf{4cm}$, $\mathbf{AB}=\mathbf{3cm}$, $\mathbf{BC}=\mathbf{5cm}$. Tìm khoảng cách từ $\mathbf{A}$ tới mặt phẳng $\left(\mathbf{BCD}\right)$.

Bài 3. Cho hình chóp $\mathbf{S.ABC}$ có $\mathbf{SA}=\mathbf{SB}=\mathbf{SC}=\mathbf{a}$, $\widehat{\mathbf{ASB}}=\mathbf{120}^\circ$, $\widehat{\mathbf{BSC}}=\mathbf{60}^\circ$, $\widehat{\mathbf{CSA}}=\mathbf{90}^\circ$. Tính khoảng cách từ $\mathbf{S}$ đến mặt phẳng $\left(\mathbf{ABC}\right)$.

Bài 4. Cho tam giác $\mathbf{ABC}$ vuông tại $\mathbf{A}$. Cạnh $\mathbf{AB}$ có độ dài bằng $\mathbf{a}$ và nằm trong mặt phẳng $\left(\alpha\right)$. Biết rằng cạnh $\mathbf{AC}$ có độ dài bằng $\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$ và tạo với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ góc $\mathbf{60}^\circ$, hãy tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{C}$ đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ cho góc vuông $\widehat{\mathbf{xOy}}$. $\mathbf{M}$ là một điểm nằm ngoài $\left(\alpha\right)$. Biết rằng $\mathbf{MO}=\mathbf{23\ cm}$ và khoảng cách từ $\mathbf{M}$ đến $\mathbf{Ox}$, $\mathbf{Oy}$ cùng bằng $\mathbf{17\ cm}$. Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{M}$ đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

Bài 6. Cho hình chóp $\mathbf{S.ABC}$ có $\mathbf{SA}$ vuông góc với đáy. Biết rằng $\mathbf{AB}=\mathbf{7\ cm}$, $\mathbf{BC}=\mathbf{5\ cm}$, $\mathbf{CA}=\mathbf{8\ cm}$, $\mathbf{SA}=\mathbf{4\ cm}$.

1) Tính khoảng cách từ $\mathbf{A}$ đến mặt phẳng $\left(\mathbf{SBC}\right)$

2) Tính khoảng cách từ các điểm $\mathbf{S}$ và $\mathbf{A}$ đến đường thẳng $\mathbf{BC}$.

Bài 7. [ĐHD07] Cho hình chóp $\mathbf{S.ABCD}$ có đáy là hình thang, $\widehat{\mathbf{ABC}}=\widehat{\mathbf{BAD}}=\mathbf{90}^\circ$, $\mathbf{BA}=\mathbf{BC}=\mathbf{a}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{2a}$. Cạnh $\mathbf{SA}$ vuông góc với đáy và $\mathbf{SA}=\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$. Gọi $\mathbf{H}$ là hình chiếu vuông góc của $\mathbf{A}$ lên $\mathbf{SB}$. Tính khoảng cách từ $\mathbf{H}$ đến mặt phẳng $\left(\mathbf{SCD}\right)$ theo $\mathbf{a}$.

Bài 8. [ĐHD09] Cho hình lăng trụ đứng $\mathbf{ABC.A'B'C'}$ có đáy $\mathbf{ABC}$ là tam giác vuông tại $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}=\mathbf{a}$, $\mathbf{AA'}=\mathbf{2a}$, $\mathbf{A'C}=\mathbf{3a}$. Gọi $\mathbf{M}$ là trung điểm của đoạn thẳng $\mathbf{A'C'}$, $\mathbf{I}$ là giao điểm của $\mathbf{AM}$ và $\mathbf{A'C}$. Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{A}$ đến mặt phẳng $\left(\mathbf{IBC}\right)$ theo $\mathbf{a}$.

Bài 9. Cho hình chóp tam giác đều $\mathbf{S.ABC}$ có cạnh đáy bằng $\mathbf{3a}$, cạnh bên bằng $\mathbf{2a}$. Gọi $\mathbf{G}$ là tâm của đáy, $\mathbf{M}$ là trung điểm của $\mathbf{SC}$.

1) Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{S}$ đến mặt phẳng $(\mathbf{ABC})$.

2) Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{M}$ đến mặt phẳng $(\mathbf{SAG})$.

Bài 10. Cho $\mathbf{ABC}$ là tam giác vuông cân tại $\mathbf{B}$, $\mathbf{BA = a}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(\mathbf{ABC})$ tại $\mathbf{A}$ lấy điểm $\mathbf{S}$ sao cho $\mathbf{SA = a}$. Gọi $\mathbf{I}$, $\mathbf{M}$ theo thứ tự là trung điểm của $\mathbf{SC}$, $\mathbf{AB}$.

1) Tính khoảng cách từ điểm $\mathbf{I}$ đến mặt phẳng $(\mathbf{ABC})$

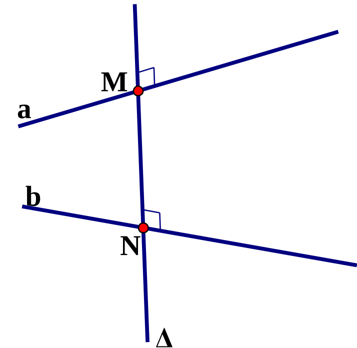
2) Tính khoảng cách từ các điểm $\mathbf{S}$ và $\mathbf{I}$ đến đường thẳng $\mathbf{CM}$.

Loại 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng

A. Tóm tắt lý thuyết

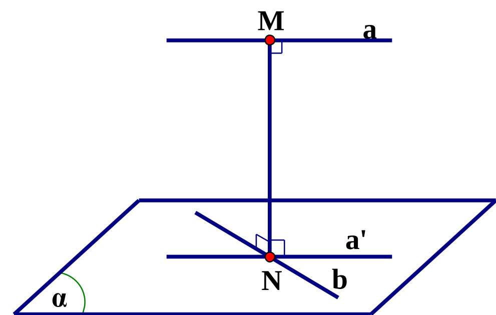
1. Định nghĩa: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

- Đường thẳng Δ cắt a, b và vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
- Nếu đường vuông góc chung cắt a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

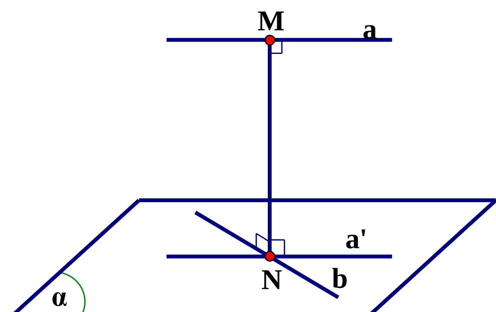


2. Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

- **Phương pháp tổng quát:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Gọi (α) là mặt phẳng chứa b và song song với a, a' là hình chiếu vuông góc của a lên (α). Đặt $N = a' \cap b$, gọi Δ là đường thẳng qua N và vuông góc với (α) $\Rightarrow$ Δ là đường vuông góc chung của a và b. Đặt $M = \Delta \cap a$ $\Rightarrow$ khoảng cách giữa a và b là độ dài đường thẳng MN.



- **Trường hợp đặc biệt:** Cho hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau a, b. Gọi (α) là mặt phẳng chứa b và vuông góc với a. Đặt $M = a \cap (\alpha)$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống b $\Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung của a, b và khoảng cách giữa a, b là độ dài đoạn thẳng MN.



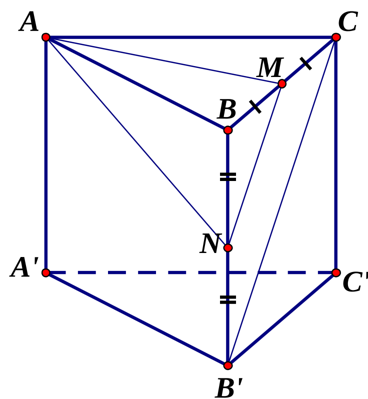
3. Nhận xét: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Các nhận xét nhau đây cho ta cách khác để tính khoảng cách giữa a và b ngoài cách dựng đường vuông góc chung.

- Nếu (α) là mặt phẳng chứa a và song song với b thì khoảng cách giữa hai đường thẳng bằng khoảng cách giữa b và (α).
- Nếu (α), (β) là các đường thẳng song song với nhau, lần lượt chứa a, b thì khoảng cách giữa hai đường thẳng bằng khoảng cách giữa (α) và (β).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. [ĐHD08] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

Giải



Lấy N là trung điểm của BB', ta có MN là đường trung bình của tam giác $B'BC$ $\Rightarrow B'C \parallel MN$ $\Rightarrow B'C \parallel (AMN)$. Do đó

$$d(B'C; AM) = d(B'C; (AMN)) = d(B'; (AMN)).$$

Lại có BB' cắt (AMN) tại N là trung điểm của BB' nên

$$d(B'; (AMN)) = d(B; (AMN)).$$

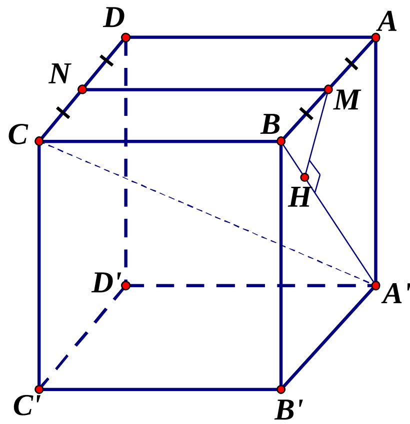
Hình chóp $B.AMN$ có BA, BM, BN đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(B;(AMN))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d(B;(AMN)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Vậy $d(B'C; AM) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Ví dụ 2. [ĐHA06] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN.

Giải



Ta thấy $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (A'BC)$

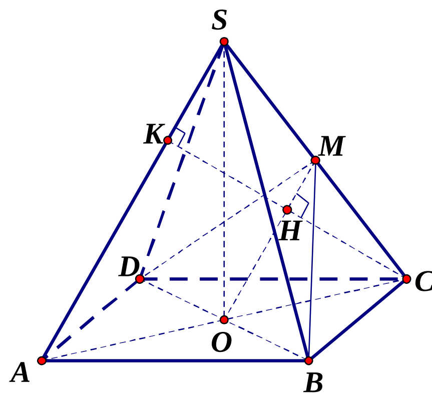
$\Rightarrow d(A'C;MN) = d(MN;A'BC) = d(M;(A'BC))$.

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống $A'B$. Ta có: $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow MH \perp BC$, mặt khác $MH \perp A'B$ (do vẽ) $\Rightarrow MH \perp (A'BC) \Rightarrow H$ chính là chân đường vuông góc hạ từ M xuống $(A'BC)$.

MH là cạnh góc vuông của tam giác vuông cân $HBM \Rightarrow MH = \dfrac{BM}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Vậy $d(A'C;MN) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 3. [ĐHA04] Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi đường chéo $AC = 4$, $SO = 2\sqrt{2}$ và SO vuông góc với đáy $ABCD$, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải



Ta có MO là đường trung bình của tam giác SAC

$\Rightarrow SA \parallel MO \Rightarrow SA \parallel (MBD)$

$\Rightarrow d(SA;MB) = d(SA;MBD) = d(S;MBD)$.

SC cắt mặt phẳng (MBD) tại trung điểm M của SC nên $d(S;(MBD)) = d(C;(MBD))$.

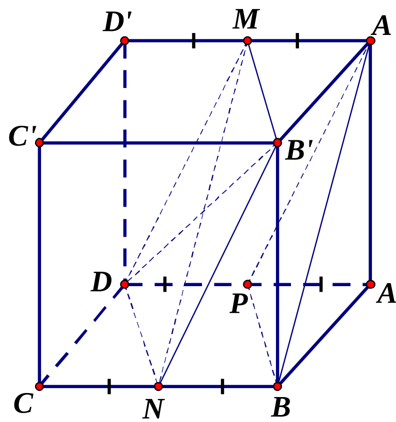
Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống SA, đặt $H = CK \cap MO$. Ta có $SO \perp (ABCD)$ $\Rightarrow BD \perp SO$, lại có $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow CH \perp BD$ (1). $MO \parallel SA$, $CK \perp SA \Rightarrow CH \perp MO$ (2). Từ (1) và (2) suy ra H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống (MBD).

Từ $SA=\sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$, $S_{SAC}=\frac{1}{2}AC.SO=\frac{1}{2}4.2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ suy ra

$CH=\frac{1}{2}CK=\frac{1}{2}\frac{2S_{SAC}}{SA}=\frac{1}{2}\frac{2.4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d\left(SA;MB\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 4. [ĐHB02] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.

Giải



Lấy M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $A'D'$, BC, AD. Ta thấy $A'MDP$ và $BNDP$ là các hình bình hành nên $MD \parallel A'P$, $DN \parallel PB$ $\Rightarrow$ $\left(MDNB'\right) \parallel \left(A'PB\right)$. Do đó

$$d\left(A'B;B'D\right)=d\left(\left(A'PB\right);\left(MDNB'\right)\right)=d\left(D;\left(A'PB\right)\right).$$

Lại có AD cắt $\left(A'PB\right)$ tại trung điểm P của AD $\Rightarrow$ $d\left(D;\left(A'PB\right)\right)=d\left(A;\left(A'PB\right)\right)$.

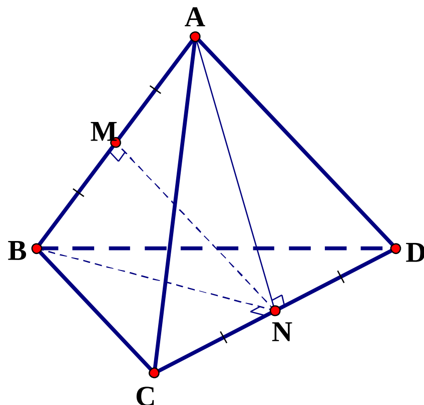
Hình chóp $A.A'PB$ có AA', AP, AB đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2\left(A;\left(A'PB\right)\right)}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{9}{a^2} \Rightarrow d\left(A;\left(A'PB\right)\right)=\frac{a}{3}.$$

Vậy $d\left(A'B;B'D\right)=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Hãy xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Ta có ACD và BCD là các tam giác đều nên CD vuông góc với AN và BN $\Rightarrow$ $CD \perp MN$.

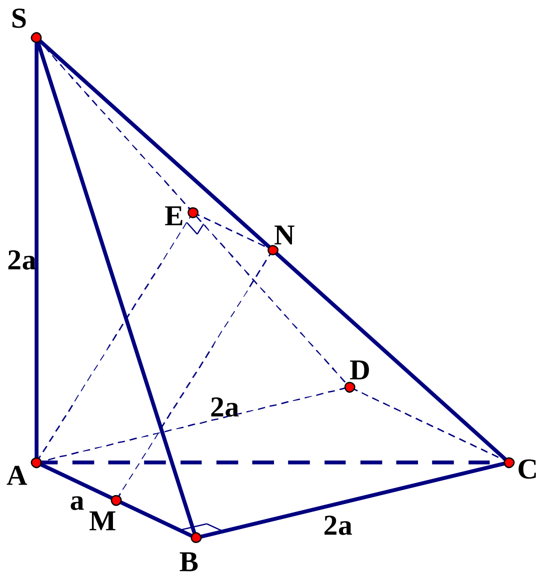
Lại có $AN=AN=3\sqrt{6}$ suy ra $AB \perp MN$ và

$$MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\sqrt{54-18}=6\left(cm\right).$$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB, CD và khoảng cách giữa chúng là $MN=6\,cm$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Hãy xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải



Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $AB \parallel (SCD)$.

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống SD. Ta thấy $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp AD$, lại có $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $CD \perp SA$ $\Rightarrow$ $CD \perp (SCD)$ $\Rightarrow$ $AE \perp CD$ (1). Mặt khác $AE \perp SD$ (do dựng) (2). Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SCD)$ $\Rightarrow$ E là hình chiếu vuông góc của A lên (SCD).

Đường thẳng qua E song song với CD chính là hình chiếu vuông góc của AB lên (SCD).

Đường thẳng này cắt SC tại N. Đường thẳng qua N song song với AE cắt AB tại M $\Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung cần tìm.Tam giác SCD cân tại A nên E là trung điểm của SD $\Rightarrow$ N là trung điểm của SD. $AM = EN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ M là trung điểm của AB.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD là $MN = AE = \frac{AD}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

C. Bài tập

Bài 1. [ĐHB07NC] Cho hình chóp tứ giác đều $\mathbf{S.ABCD}$ có đáy là hình vuông cạnh $\mathbf{a}$. Gọi $\mathbf{E}$ là điểm đối xứng với $\mathbf{D}$ qua trung điểm của $\mathbf{SA}$, $\mathbf{M}$ là trung điểm của $\mathbf{AE}$, $\mathbf{N}$ là trung điểm của $\mathbf{BC}$. Chứng minh $\mathbf{MN}$ vuông góc với $\mathbf{BD}$ và tính (theo $\mathbf{a}$) khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathbf{MN}$ và $\mathbf{AC}$.

Bài 2. [ĐHA11] Cho hình chóp $\mathbf{S.ABC}$ có đáy là tam giác vuông cân tại $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB = BC = 2a}$; hai mặt $(\mathbf{SAB})$ và $(\mathbf{SAC})$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(\mathbf{ABC})$. Gọi $\mathbf{M}$ là trung điểm của $\mathbf{AB}$;

mặt phẳng qua $\mathbf{SM}$ song song với $\mathbf{BC}$, cắt $\mathbf{AC}$ tại $\mathbf{N}$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(\mathbf{SBC})$ và $(\mathbf{ABC})$ bằng $\mathbf{60^\circ}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathbf{AB}$ và $\mathbf{SN}$ theo $\mathbf{a}$.

Bài 3. [ĐHA10] Cho hình chóp $\mathbf{S.ABCD}$ có đáy là hình vuông cạnh $\mathbf{a}$. Gọi $\mathbf{M}$ và $\mathbf{N}$ lần lượt là trung điểm của $\mathbf{AB}$ và $\mathbf{AD}$; $\mathbf{H}$ là giao điểm của $\mathbf{CN}$ và $\mathbf{DM}$. Biết $\mathbf{SH}$ vuông góc với mặt phẳng $(\mathbf{ABCD})$ và $\mathbf{SH = a\sqrt{3}}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathbf{DM}$ và $\mathbf{SC}$ theo $\mathbf{a}$.

Bài 4. [ĐHA12] Cho hình chóp $\mathbf{S.ABC}$ có đáy là tam giác đều cạnh $\mathbf{a}$, hình chiếu vuông góc của $\mathbf{S}$ lên mặt phẳng $(\mathbf{ABC})$ là điểm $\mathbf{H}$ thuộc cạnh $\mathbf{AB}$ sao cho $\mathbf{HA = 2HB}$. Góc giữa đường thẳng $\mathbf{SC}$ và mặt $(\mathbf{ABC})$ bằng $\mathbf{60^\circ}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathbf{SA}$ và $\mathbf{BC}$ theo $\mathbf{a}$.

Bài 5. Cho hình chóp $\mathbf{S.ABCD}$ có đáy là hình vuông cạnh $\mathbf{a}$, $\mathbf{SA = h}$ và $\mathbf{SA}$ vuông góc với đáy. Hãy xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathbf{SC}$ và $\mathbf{AB}$.

Bài 6. Trong mặt phẳng $(\mathbf{P})$ cho đường tròn đường kính $\mathbf{AB = 2R}$, $\mathbf{C}$ là một điểm chạy trên đường tròn đó. Trên đường thẳng đi qua $\mathbf{A}$ và vuông góc với $(\mathbf{P})$ lấy $\mathbf{S}$ sao cho $\mathbf{SA = a < 2R}$. Gọi $\mathbf{E}$ và $\mathbf{F}$ lần lượt là trung điểm của $\mathbf{AC}$ và $\mathbf{SB}$. Xác định vị trí của $\mathbf{C}$ trên đường tròn sao cho $\mathbf{EF}$ là đường vuông góc chung của $\mathbf{AC}$ và $\mathbf{SB}$.

Bài 7. Cho tứ diện $\mathbf{ABCD}$ có $\mathbf{AC = AD = BC = BD = a}$, $\mathbf{AB = 2m}$, $\mathbf{CD = 2n}$. Gọi $\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$ lần lượt là trung điểm của $\mathbf{AB}$ và $\mathbf{CD}$.

1) Chứng minh rằng $\mathbf{IK}$ là đường vuông góc chung của hai cạnh $\mathbf{AB}$ và $\mathbf{CD}$.

2) Tính độ dài $\mathbf{IK}$ theo $\mathbf{a}$, $\mathbf{m}$ và $\mathbf{n}$.